Zur Theorie der Verticalsonnenuhr.

Von Prof. **L. Fodor-Mayerhoffer**
in Neusohl.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Jänner 1884.)

Wird in einem Momente durch den zur Weltaxe parallelen Zeiger (Stil) *OS* — siehe Figur — einer verticalen Sonnenuhr und den diesem Momente entsprechenden Sonnenstrahl *OL* eine Ebene gelegt, so schneidet diese die Uhrebene in einer Geraden *OF*, dem Schatten des Zeigers für diesen Augenblick. Ist *ON* die verticale Mittagslinie, somit der Winkel $NOS = 90° - \varphi$, wobei φ die geographische Breite des Aufstellungsortes bedeutet, und bezeichnen wir den dem gewählten Momente entsprechenden Stundenwinkel *NSF* mit S, den Schattenwinkel *NOF* mit s und die Abweichung *FNS* der Uhrebene von der Ebene des Meridians mit N, so erhalten wir aus dem sphärischen Dreiecke *FNS*

$$\operatorname{cotg} s = \operatorname{tg} \varphi \cos N + \frac{\sin N \operatorname{cotg} S}{\cos \varphi}. \qquad 1)$$

Ist nun zufolge eines bei der Befestigung des Zeigers begangenen geringen Fehlers der Zeiger der Uhr in OS_0, so dass seine Lage von der zur Weltaxe parallelen Richtung *OS* um dN und $d\varphi$ abweicht, und legen wir durch *LO* und OS_0 eine Ebene, so wird diese die Uhrebene nach der Geraden (Zeigerschatten) OF_0 schneiden, so dass für den Stundenwinkel S den Fehler ds in der Angabe der Sonnenuhr der Winkel FOF_0 anzeigt. Um nun dieses ds zu berechnen, betrachten wir vorerst das sphärische Dreieck *LNS*, in dem die Seiten $NS = 90° - \varphi$, $LN = 90° + h$, $LS = 90° + \delta$ und die Winkel ω, $180° - S$ vorkommen, wobei h, δ, ω beziehungsweise die Höhe, Declination und das Azimut der Sonne bedeuten; es ist

$$\operatorname{tg} h \cos\varphi = -\sin\varphi \cos\omega + \sin\omega \operatorname{cotg} S; \qquad 2)$$

und wird aus 1) und 2) cotg S eliminirt, so erfolgt

$$\operatorname{cotg} s \cos\varphi \sin\omega = \sin\varphi \sin(\omega + N) + \sin \quad \operatorname{tg} h \cos\varphi.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach N, s, φ und ω, mit Rücksicht darauf, dass $d\omega = -dN$, und dass somit $\omega + N$ sich nicht ändert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\operatorname{cosec} s^2 \cos\varphi \sin\omega\, ds + \cos\varphi (\operatorname{cotg} s \cos\omega + \cos N \operatorname{tg} h)\, dN - \\ &-[\sin\varphi (\operatorname{tg} h \sin N - \operatorname{cotg} s \sin\omega) - \sin(\omega + N)\cos\varphi] d\varphi = 0 \end{aligned} \qquad 3)$$

Sei nun $U = \cos\varphi (\operatorname{cotg} s \cos\omega + \cos N \operatorname{tg} h)\, dN$

und $V = [\sin\varphi (\operatorname{tg} h \sin N - \operatorname{cotg} s \sin\omega) - \sin(\omega + N) \cos\varphi] d\varphi$,

so finden wir mit Rücksicht auf die Gleichung 1) und 2) und nach der Reduction

$$U = \sin(\omega + N) \operatorname{cotg} S\, dN$$

und

$$V = -\frac{\sin(\omega + N)}{\cos\varphi} d\varphi,$$

und es folgt aus 3) zufolge dieser Werthe von U und V

$$ds = -\frac{(\cos N + \sin N \operatorname{cotg} \omega)(\cos\varphi \operatorname{cotg} S\, dN + d\varphi)}{\cos\varphi^2 \operatorname{cosec} s^2}, \qquad 4)$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf 1) und weil ferner im sphärischen Dreiecke LNS

$$\operatorname{cotg}\omega = \sin\varphi \operatorname{cotg} S - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} S \qquad 5)$$

stattfindet, noch die Form annimmt:

$$ds = -\frac{[\cos N + \sin N(\sin\varphi \operatorname{cotg} S - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} S)](\cos\varphi \operatorname{cotg} S\, dN + d\varphi}{\cos\varphi^2 + \cos N^2 \sin\varphi^2 + 2 \sin N \cos N \sin\varphi \operatorname{cotg} S + \sin N^2 \operatorname{cotg} S^2} \qquad 6)$$

Eine nähere Betrachtung der Werthe von ds gestattet am einfachsten die Gleichung 4), aus welcher ersichtlich ist, dass $ds = 0$ eintritt für

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \cos N + \sin N \operatorname{cotg}\omega = 0, \\ &b)\ \operatorname{cotg} S \cos\varphi\, dN + d\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

I. Im ersten Falle ist also $\operatorname{cotg} \omega = -\operatorname{cotg} N$, d. h. es gelangt die Sonne in die Uhrebene; diesen Werth von $\operatorname{cotg} \omega$ in die Gleichung 5) gesetzt, erhalten wir

$$-\operatorname{cotg} N = \sin\varphi \operatorname{cotg} S - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} S,$$

woraus

$$\operatorname{cotg} S_{1,2} = \frac{-\operatorname{cotg} N \sin\varphi \pm \operatorname{tg}\delta \cos\varphi \sqrt{\operatorname{cotg} N^2 + \sin\varphi^2 - \operatorname{tg}\delta^2 \cos\varphi^2}}{\sin\varphi^2 - \cos\varphi^2 \operatorname{tg}\delta^2} \qquad 8)$$

a) Es hat nun $\operatorname{cotg} S_{1,2}$ zwei reelle Werthe, wenn

$$\operatorname{tg}\delta^2 < \frac{\sin\varphi^2 + \operatorname{cotg} N^2}{\cos\varphi^2};$$

nachdem aber im rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke $(F)NS$, in dem $(F)S = n$ die Neigung des Zeigers zur Uhrebene bedeutet, $\sin n = \sin N \cos\varphi$ und somit

$$\operatorname{cotg} n^2 = \frac{\sin\varphi^2 + \operatorname{cotg} N^2}{\cos\varphi^2}$$

stattfindet, so folgt, dass die beiden Werthe von $\operatorname{cotg} S_{1,2}$ reell sind, so lange $\operatorname{tg}\delta^2 < \operatorname{cotg} n^2$.

Es hat also die fehlerhafte Stellung des Zeigers einer verticalen Sonnenuhr auf die Angabe derselben — insoferne es von der Erfüllung der Bedingungsgleichung 7*a*) abhängt — des Tages zweimal keinen Einfluss, wenn der absolute Werth der Declination der Sonne kleiner ist als das Complement des Neigungswinkels des Zeigers zur Uhrebene.

Auf der Figur sind die äussersten Schattenlinien in OF_1, OF_2, die äussersten Lichtstrahlen selbst in OL_1, OL_2 dargestellt.

b) Im Falle

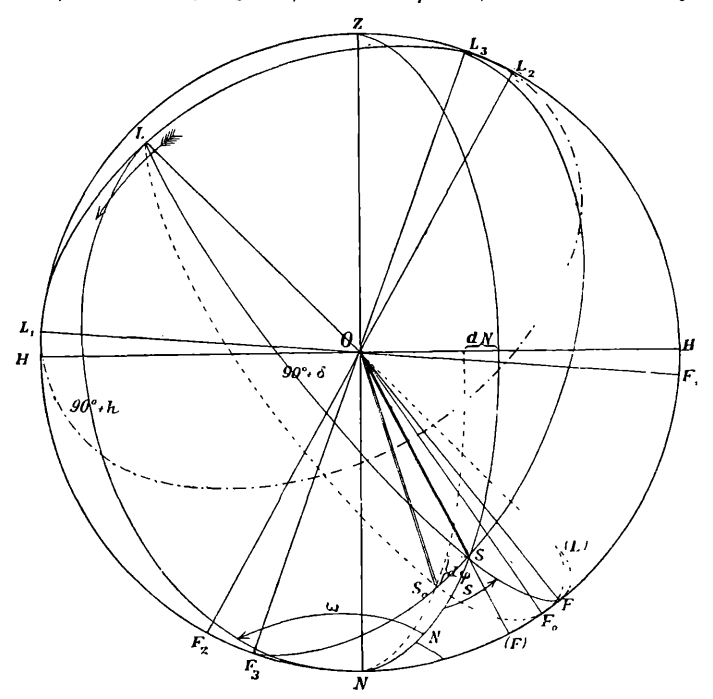
$$\operatorname{tg}\delta = \pm \frac{\sqrt{\sin\varphi^2 + \operatorname{cotg} N^2}}{\cos\varphi} = \pm \operatorname{cotg} n$$

d. h. der absolute Werth des δ gleich $90° - n$ ist, so erhalten wir aus 8) nur einen Werth für S, u. z.

$$\operatorname{cotg} S_1 = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{cotg} N}, \qquad 9)$$

und dies zeigt an, dass dieser Stundenwinkel mit dem Stundenwinkel $NS(F)$ der Substilarebene identisch ist. Und da immer

$NS > (F)S$, d. h. $90° - \varphi > n$ oder $90° - n > \varphi$ ist, so folgt, dass der Fall I *b*) zur Bedingung hat, dass $\delta > \varphi$ sei; d. h. nur an jenen



Orten, die zwischen den beiden Wendekreisen gelegen sind, tritt es ein, dass — zufolge der Erfüllung der Gleichung 7*a*) — die fehlerhafte Stellung des Zeigers auf die Angabe einer verticalen Sonnenuhr des Tages nur einmal keinen Einfluss hat. Es fallen da die beiden äussersten Schattenlagen in der Tages- oder Nachtsubstilarlinie zusammen, je nachdem φ und δ gleich oder verschieden gezeichnet sind. Weicht die Uhrebene von der Richtung Ost-West nicht ab, d. h. ist $N = 90°$, so findet $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{cotg} S_1 = \infty, (S_1 = 0)$ statt; es fallen da also die beiden äussersten Schattenlinien in die Mittags- oder Mitternachtslinie, je nachdem φ und δ gleiche Zeichen haben oder nicht.

c) Es sind die beiden Werthe von $\operatorname{cotg} S_{1,2}$ aus 8) imaginär, wenn $\operatorname{tg} \delta^2 > \frac{\sin \varphi^2 + \operatorname{cotg} N^2}{\cos \varphi^2}$, d. h. wenn, vom Vorzeichen abgesehen, $\delta > \varphi$. — Es bedeutet dies, dass an den Orten, welche zwischen den beiden Wendekreisen gelegen sind, der Fall eintritt,

dass die Sonne in das Azimut der verticalen Sonnenuhr den ganzen Tag hindurch nicht kommt, wenn nämlich die geographische Breite des Aufstellungsortes kleiner ist als die Declination der Sonne.

Wenn im Falle I *a*) auch $\delta = 0$ wird, so erhalten wir

$$\operatorname{cotg} S_{1,2} = -\frac{\operatorname{cotg} N}{\sin \varphi},$$

und dies mit 9) verglichen, macht ersichtlich, dass hier die beiden äussersten Schattenlagen zur Substilarlinie normal sind.

II. Der Werth von ds verschwindet ferner nach 7 *b*) für

$$\operatorname{cotg} S_{3,4} = -\frac{d\varphi}{dN} \sec \varphi, \qquad 10)$$

woraus zwei Werthe für S sich ergeben, nämlich S_3 und $S_4 = 180° + S_3$, und es sind $\operatorname{cotg} S_{3,4}$ positiv oder negativ, je nachdem $d\varphi$ und dN verschiedene oder gleiche Zeichen haben.

Die Erfüllung der Gleichung 7 *b*) bedeutet, dass die Sonne in die Ebene SOS_0 des richtigen und des unrichtig angebrachten Zeigers tritt, der Lichtstrahl also in OL_3, und der Schatten der beiden Zeiger in OF_3 sich befindet.

Denn in dem Dreiecke NSS_0 ist $NS = 90° - \varphi$, $NS_0 = 90° - \varphi + d\varphi$, der Winkel $SNS_0 = dN$, und NSS_0 bedeutet den Stundenwinkel der Ebene SOS_0; es ist da

$$\operatorname{tg}(\varphi - d\varphi) \cos \varphi = \sin \varphi \cos dN + \sin dN \operatorname{cotg} S, \qquad 11)$$

in welche Gleichung

$$\operatorname{tg}(\varphi - d\varphi) = \operatorname{tg} \varphi - \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2} + .$$

wie auch $\cos dN = 1$ und $\sin dN = dN$ gesetzt, wir

$$\left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2}\right) \cos \varphi = \sin \varphi + \operatorname{cotg} S \, dN$$

und hieraus

$$\operatorname{cotg} S = -\frac{d\varphi}{dN} \sec \varphi$$

erhalten, welcher Werth von $\cotg S$ mit demjenigen in 10) übereinstimmt.

Aus 10) folgt, dass die Zeit S_3, S_4, in welcher die Sonne in die Ebene der beiden Zeiger tritt, als von der Declination δ der Sonne unabhängig, für alle Tage des Jahres dieselbe ist.

Nachdem von den Werthen S_3, S_4 nur einer zu nehmen ist, und derjenige, welcher die Nachtzeit andeutet, ausser Betracht kommt, so ist aus dem unter I und II Gesagten ersichtlich, dass es des Tages dreimal eintreten kann, dass die fehlerhafte Stellung des Zeigers auf die Angabe einer verticalen Sonnenuhr keinen Einfluss habe, und zwar sind es die beiden Momente, in den die Sonne *a)* in die Uhrebene kommt, *b)* aus derselben austritt und *c)* inzwischen jenen Augenblick, in dem die Sonne in die Ebene der beiden Zeiger gelangt. Ist nun der Fehler ds in der Zeit zwischen S_1 und S_3 positiv, so ist er negativ zwischen S_3 und S_2, und umgekehrt. — Liegt S_3 nicht zwischen S_1 und S_2, so kommt dieser Zeitmoment nicht in Betracht.

III. Wird 7 *a)* und 7 *b)* zugleich erfüllt, so liefert die Gleichung 5) mit Rücksicht hierauf

$$\operatorname{tg}\delta = \pm \frac{\operatorname{cotg} N - \operatorname{tg}\delta \frac{d\varphi}{dN}}{\cos\varphi \sqrt{1 - \frac{d\varphi^2}{dN^2}\,\frac{1}{\cos\varphi^2}}}; \qquad 12)$$

es ist aber in $F_3 NS$, wenn $F_3 S$ mit n_1 bezeichnet wird,

$$\operatorname{cotg} n_1 \cos\varphi = \sin\varphi \cos S + \sin S \operatorname{cotg} N,$$

und wird hierin

$$\operatorname{cotg} S = -\frac{d\varphi}{dN} \sec\varphi \text{ gesetzt,}$$

$$\operatorname{cotg} n_1 = \pm \frac{\operatorname{cotg} N - \operatorname{tg}\varphi \frac{d\varphi}{dN}}{\cos\varphi \sqrt{1 - \frac{d\varphi^2}{dN^2} \cdot \frac{1}{\cos\varphi^2}}},$$

woraus folgt, dass $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg} n_1$, d. h. $90° - \delta = n_1$.

Ist also $90° - \delta_{max} < n_1$, so wird es einmal vor und einmal nach dem Eintreten des δ_{max}, also zusammen viermal im Jahre geschehen, dass eine der äussersten Schattenlinien in die Ebene

der beiden Zeiger fällt; bei $90°-\delta_{max} = n_1$ ereignet es sich zusammen **zweimal**, und ist $90°-\delta_{max} > n_1$, so kommt der Fall III bei der Sonnenuhr **gar nicht** vor.

Soll der Fall III zugleich mit $\delta = 0$ eintreten, so folgt aus 12) als Bedingung $\operatorname{cotg} N\, dN = \operatorname{tg} \varphi\, d\varphi$.

Wenn zufolge der Beschaffenheit von $d\varphi$ und dN die durch die beiden Zeiger gelegte Ebene die Substilarlinie $O(F)$ enthält (d. h. zur Uhrebene normal ist), und wir den Stundenwinkel dieser Ebene mit σ bezeichnen, so haben wir aus $(F)NS$ die Relation

$$\operatorname{cotg} \sigma = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{cotg} N},$$

und als Bedingung des II. Falles:

$$\cos \varphi \operatorname{cotg} S\, dN + d\varphi = 0,$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{dN} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\operatorname{cotg} N}$$

folgt, und es wird demgemäss die Gleichung 4) zu

$$ds = -\frac{(\cos N + \sin N \operatorname{cotg} \omega)(\operatorname{cotg} S - \operatorname{cotg} \sigma)\, dN}{\cos \varphi \operatorname{cosec} s^2}.$$

Setzen wir nun in diese Gleichung statt S einmal $\sigma + T$, ein anderesmal $\sigma - T$, so erfolgen für ds zwei gleiche, jedoch verschieden gezeichnete Werthe, was darauf deutet, dass bei der bezeichneten Lage des fehlerhaft angebrachten Zeigers die bei der Angabe der Sonnenuhr auftretenden gleich grossen, jedoch verschieden gezeichneten Fehler mit der Substilarlinie gleiche Winkel bilden, d. h. ihre Lage zur Substilarlinie **symmetrisch** ist.

Um diejenigen Werthe von S zu erhalten, welche ds die (vom Vorzeichen abgesehen) grössten Werthe verleihen, führen wir vorerst in die Gleichung 6) statt S den halben Winkel $\frac{S}{2}$ ein,

differentiiren dann bei constantem δ[1] den so erhaltenen Ausdruck für ds nach S als Variabeln, und setzen schliesslich den Zähler der 0 gleich; so kommen wir zur folgenden Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a & A \\ b & B \end{vmatrix} \overline{\operatorname{tg}\frac{S}{2}}^{6} + 2\begin{vmatrix} a & A \\ c & C \end{vmatrix} \overline{\operatorname{tg}\frac{S}{2}}^{5} + \left(3\begin{vmatrix} a & A \\ d & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & B \\ c & C \end{vmatrix} \right) \overline{\operatorname{tg}\frac{S}{2}}^{4} + \left(4\begin{vmatrix} a & A \\ e & E \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & B \\ d & D \end{vmatrix} \right) \overline{\operatorname{tg}\frac{S}{2}}^{3} + \left(3\begin{vmatrix} b & B \\ e & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & C \\ d & D \end{vmatrix} \right) \overline{\operatorname{tg}\frac{S}{2}}^{2} + 2\begin{vmatrix} c & C \\ e & E \end{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{S}{2} + \begin{vmatrix} d & D \\ e & E \end{vmatrix} = 0, \ldots 13)$$

wobei

$$a = \sin N^2$$
$$b = -4 \sin N \cos N \sin\varphi$$
$$c = \begin{cases} 4(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 \cos N^2) \\ -2 \sin N^2 \end{cases}$$
$$d = 4 \sin N \cos N \sin\varphi$$
$$e = \sin N^2$$

$$A = \sin N \cos\varphi (\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\delta) dN$$
$$B = -2 \begin{cases} \sin N (\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\delta)\, d\varphi \\ \cos N \cos\varphi\, dN \end{cases}$$
$$C = 2 \begin{cases} 2 \cos N\, d\varphi \\ -\sin N \sin\varphi \cos\varphi\, dN \end{cases}$$
$$D = 2 \begin{cases} \sin N (\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta)\, d\varphi \\ \cos N \cos\varphi\, dN \end{cases}$$
$$E = \sin N \cos\varphi (\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta) dN$$

Von dieser Gleichung brauchen wir nur eine, höchstens zwei Wurzeln zu kennen, und auch deren Grenzen sind bekannt; denn ist S_3 zwischen S_1 und S_2 gelegen, so sind dieses die drei Stundenwinkel, für welche ds verschwindet, es wird also ds in der Zeit zwischen S_1 und S_3 zuerst wachsen und dann nach Erlangung des Maximums bis 0 abnehmen; dasselbe geschieht in der Zwischenzeit von S_3 und S_2, nur dass ds jetzt vom früheren verschieden gezeichnet ist. Für 13) sind also die Grenzen der beiden nöthigen Wurzeln $\operatorname{tg}\frac{S_1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{S_2}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{S_3}{2}$:

Zur Untersuchung, an welchem Tage des Jahres, d. h. bei welchem δ das, einem bestimmten Stundenwinkel entsprechende

[1] Für δ ist dann derjenige Werth zu nehmen, den es erreicht, wenn die Sonne in die Substilarebene tritt, d. h. welcher dem σ entspricht.

ds den Maximalwerth erreicht, sehen wir vom Vorzeichen des *ds* ab, und nehmen 8) in der Form: $ds = P - R \operatorname{tg} \delta$, wobei P und R von δ unabhängige und für constantes S bestimmte Grössen sind.

Diese Gleichung zeigt an, dass

bei dem grössten positiven δ das *ds* ein Minimum (22. Juni),

bei $\delta = 0$ das *ds* gleich P (21. März und 23. Sept.),

bei dem grössten negativen δ das *ds* ein Maximum wird (22. Dec.).

Bei einer in Neusohl, also unter der nördlichen Breite von 48°44′ und östl. Länge von (Ferro) 36°49′ aufgestellten verticalen Sonnenuhr, deren Abweichung von der Ebene des Meridians $N = 32°25'$ beträgt, wurde durch spätere genaue Messung als Abweichung des Zeigers von der richtigen Lage $d\varphi = 4'$ $dN = 2'$ gefunden. Nach den hier entwickelten Formeln trat z. B. am 17. September 1883 (Declination der Sonne für σ war 2°15′5″) die Sonne um $10^h 21^m 20^s$ Vormittags ($S_1 = -24°40'$) in die Ebene der Uhr ein, verliess dieselbe um $10^h 14^m 32^s$ Nachts ($S_2 = 153°38'$), also erst lange nach dem Untergange, und befand sich um $10^h 47^m$ Vormittags ($S_3 = -18°15'6''$) in der Ebene der beiden Stile. Für den Zeitpunkt des Maximums zwischen S_1 und S_2 ergibt die Gleichung 13) den Werth $\operatorname{tg} \frac{S}{2} = 0{\cdot}992415$, d. h. $S = 89°33'48''{\cdot}8$ ($5^h 58^m 15{\cdot}2^s$ Nachmittags), welcher in die Gleichung 6) gesetzt $ds = -237''{\cdot}3$ ($-15{\cdot}8^s$) liefert, eine Grösse, welche selbst bei einer Sonnenuhr, wie diese, deren Zeiger ein ungedrehter Seidenfaden bildet, nicht merkbar ist. — Der Maximalfehler *ds* zwischen S_1 und S_3 erscheint in diesem Beispiele noch kleiner.
